TITLE:
$SU$(2,2) 上のある実新谷関数について(保型形式とゼータ関数の研究)

AUTHOR(S):
早田, 孝博

CITATION:
早田, 孝博. $SU$(2,2) 上のある実新谷関数について(保型形式とゼータ関数の研究). 数理解析研究所講究録 1997, 1002: 160-168

ISSUE DATE:
1997-06

URL:
http://hdl.handle.net/2433/61411

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録
1002巻 1997年 160-168



# $SU(2,2)$ 上のある実新谷関数について

神戸大自然科学 早田孝博 (Hayata, Takahiro) [1]

## 1. 導入

$G$ を半単純リー群, $K$ をその極大コンパクト群, $H$ を $G$ の閉部分群とする. また, $(\pi, \mathcal{H})$ を $G$ の既約認容表現, $(\eta, \mathcal{F})$ を $H$ の既約ユニタリ表現とする.

$(\mathfrak{g}, K)$ 加群としての intertwining 作用素の空間

$$W_{\pi,\eta} = \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g},K)}(\mathcal{H}, C_{\eta}^{\infty}(H\backslash G))$$

を考える. この時, $\Phi \in W_{\pi,\eta}$ に対し, $K$ 有限ベクトル $v$ の像 $\Phi(v)$ はどういう関数になるかというのは興味深い問題で, いろいろな場合に対してこれまで計算がなされている.

よく知られているように, ある $K$-type を固定することにより, $W_{\pi,\eta}$ は関数空間

$$C_{\eta,\tau}^{\infty}(H\backslash G/K) = \{F\colon G \overset{C^{\infty}}{\to} \mathcal{F} \otimes V_{\tau} \mid F(hgk) = \eta(h) \otimes \tau(k)^{-1} F(g)\}$$

に単射的に写像される. ここでは, $G$ として符号 $(2,2)$ の特殊ユニタリ群, $H$ として二次のシンプレクティック群, $\pi$ を一次元 $K$-type を持つ $G$ の一般主系列表現, $\eta$ として $H$ の離散系列表現をとったときの計算結果を報告する. このとき, $W_{\pi,\eta}$ の $C_{\eta,\tau}^{\infty}(H\backslash G/K)$ 内の像の元 $\Phi_{\pi,\tau}$ をここでは新谷関数と呼ぶ.

得られた結果は次の通りである. (記号などは [2, 3] などを参照のこと.)

$P_J$ を $G$ の Jacobi 型の極大放物型部分群とする. そのレビ部分群 は $\mathbb{C}^{(1)} \times SL(2,\mathbb{R})$ に同型で, その離散系列として $\chi_m \otimes D_k^{\pm}$ がとれる. ここで, $\chi_m(e^{i\theta}) = e^{im\theta}$, $D_k^{\pm}$ は Blattner parameter がそれぞれ $k$, $-k$ の $SL(2,\mathbb{R})$ の離散系列表現である. $P_J$ の極大分裂輪環部分群は $\mathbb{R}_{>0}$ と同型で character として $e^{\nu}$ をとる ($\nu \in \mathbb{C}$). こうして, 誘導表現

$$\pi = \mathrm{ind}_{P_J}^{G}(\chi_m \otimes D_k^{+} \otimes e^{\nu+\rho_J} \otimes 1)$$

を構成する. ($\rho_J$ は $P_J$ に付随する正ルートの半分和.) また, $\eta = \eta_{(l_1,l_2)}$ を Blattner parameter が $(l_1, l_2)$ である $H$ の離散系列表現とする ($l_1 \geq l_2 \in \mathbb{Z}$).

---

[1] 日本学術振興会特別研究員, 現東京大学数理科学.

**命題 1.1.** $\eta=\eta_{(l_1,l_2)}$ が正則でも反正則でもない離散系列表現で, $l_1-l_2>m$ を満たす時,

$$\dim_{\mathbb{C}} W_{\pi,\eta}=0.$$

特に $m=0$ のとき, 0 でない $W_{\pi,\eta}$ の元が存在するためには $\eta$ は (反) 正則であることが必要である.

**定理 1.2.** $m=0$ とし, $\eta=\eta_{(l,l)}$ を (1 次元 $K\cap H$ *type* を持つ) 正則離散系列とする.

$$\dim_{\mathbb{C}} W_{\pi,\eta}\leq 1.$$

**定理 1.3.** $\pi=\mathrm{ind}_{P_J}^{G}(1\otimes D_k^{+}\otimes e^{\nu+\rho_J}\otimes 1)$ を $G=SU(2,2)$ の 一般主系列表現, $\tau^*$ をその *corner K-type* とする. $\eta=\eta_{(l,l)}$ を $H=Sp(2,\mathbb{R})$ の正則離散系列とする. ($l>0$, $k>0$). $\Phi_{\pi,\eta}(a)=\sum_{l'\geq l}c_{l'}(a)\varphi_{l',\tau}$ を新谷関数とすると, $c_l$ は次の微分方程式を満たす.

$$\begin{aligned}(1)\qquad &\Big(\Big(\frac{d}{dt}+6\,\mathrm{th}\,2t-(\mathrm{ch}\,2t)^{-1}(-2l(\mathrm{th}\,t)^{-1}+(2l+2k-2)(\mathrm{th}\,2t)^{-1})\Big)\\ &\Big(\frac{d}{dt}+(2l-2k)(\mathrm{th}\,2t)^{-1}-2l(\mathrm{th}\,t)^{-1}\Big)\\ &+(1+(\mathrm{ch}\,2t)^{-1})((k-3)^2-\nu^2)\Big)c_l=0 \qquad (a=\exp tH_0)\end{aligned}$$

ここで, $\{\varphi_{l',\tau}\}$ は後述する $\eta\otimes\tau$ の $M$ 不変基底である.

この微分方程式はシュミット作用素を使う事で計算される. その際, 「良い」基底を取り, さらにシュミット作用素の動径成分を「正しく」表示することが大切である. それは $M$ での不変性を保つようにすることなのだが, 以下の節でそのことについて説明したい.

## 2. 一般 Cartan 分解と不変基底

$G$ を半単純リー群, $\theta$ を Cartan involution, $\sigma$ を $\theta$ と可換な involution とする. $K=G^\theta$, $H=G^\sigma$ とする. なおそれぞれのリー環を対応するドイツ文字で書く. すると, $\mathfrak{k}=\mathfrak{g}(\theta;+1)$, $\mathfrak{h}=\mathfrak{g}(\sigma;+1)$, であり, また, $\mathfrak{p}=\mathfrak{g}(\theta;-1)$, $\mathfrak{q}=\mathfrak{g}(\theta;-1)$ と置く.

$\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{p}\cap\mathfrak{q}$ の極大可換部分環とし, $A=\exp\mathfrak{a}$ とする. $M=Z_{K\cap H}(\mathfrak{a})$, $\mathfrak{m}=\mathfrak{z}_{K\cap H}(\mathfrak{a})$ とする. $\mathfrak{m}$ は簡約可能 (reductive) である.

良く知られているように, 次のような分解がある.

**定理 2.1 (一般カルタン分解).**

$$G = HAK.$$

この分解において, $A$ の部分は $\mathrm{mod}\, N_{K\cap H}(A)/Z_{K\cap H}(A)$ でただ一つに決まる.

$(\tau, V_\tau)$ を $K$ の既約表現, $(\eta, \mathcal{F})$ を $H$ の既約ユニタリ表現とし, 関数空間 $C^\infty_{\eta,\tau}(H\backslash G/K)$ を考える. 定義より, $C^\infty_{\eta,\tau}(H\backslash G/K)$ の元はその $A$ 上の値だけできまる. すなわち,

$$C^\infty(A, \mathcal{F}\otimes V_\tau) = \{F\colon A \overset{C^\infty}{\to} \mathcal{F}\otimes V_\tau \mid \eta(m)\otimes\tau(m)F(a) = F(mam^{-1}),\ m \in N_{K\cap H}(A)\}$$

と同型である.

**補題 2.2.** $F \in C^\infty(A, \mathcal{F}\otimes V_\tau)$ ならば

$$F(A) \subset (\mathcal{F}\otimes V_\tau)^M.$$

また, $\delta$ を $K_H = K \cap H$ の既約表現とし, $\mathcal{F}(\delta)$ を $\eta$ の $\delta$-isotypic 空間 とする. すると $K_H$-有限ベクトル全体 $\mathcal{F}^0$は $\mathcal{F}^0 = \sum_{\delta\in K^\wedge}\mathcal{F}(\delta)$ と直和分解される. $\mathcal{F}^0\otimes V_\tau$ は $\mathcal{F}\otimes V_\tau$ の中で稠密であるが, 射影

$$\int_M \eta\otimes\tau(m)v\,dm$$

を考える事により, $(\mathcal{F}^0\otimes V_\tau)^M$ は $(\mathcal{F}\otimes V_\tau)^M$ の中で稠密であることもわかる. さらに, 自然に $(\sum_\delta \mathcal{F}(\delta)\otimes V_\tau)^M = \sum_\delta(\mathcal{F}(\delta)\otimes V_\tau)^M$ である. また, $(\mu, W_\mu) \in M^\wedge$ に対し, $\iota_{\mu,\delta} \in \mathrm{Hom}_M(\mu, \mathcal{F}(\delta))$, $\iota_{\mu,\tau} \in \mathrm{Hom}_M(\mu, \tau^*)$ とするとき, $W$ の基底 $\{w_j\}$ に対し,

$$\varphi_{\mu,\iota_{\mu,\delta},\iota_{\mu,\tau}} = \sum_j \iota_{\mu,\delta}(w_j)\otimes\iota_{\mu,\tau}(w_j^*)$$

で定める. これは $M$-不変であり, $\iota_{\mu,*,*}$ を全て固定する事により, $(\mathcal{F}^0\otimes V_\tau)^M$ の基底がとれる. 特に

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{F}(\delta)\otimes V_\tau)^M = \sum_{\mu\in M^\wedge}[\mathcal{F}(\delta)|_M : \mu][\tau^*|_M : \mu] = [\eta|_{K_H} : \delta]\sum_{\mu\in M^\wedge}[\delta|_M : \mu][\tau^*|_M : \mu]$$

である.

(命題 1.1 の証明).

正則でも反正則でもない離散系列表現の $K_H$-type $\delta$ の分布のしかたから, corner $K$-type に対応する $\tau$ に対して,

$$\mathrm{Hom}_M(\tau, \delta) = \{0\}$$

が示される. すなわち, $l_1 - l_2 > m$ ならば, $(\mathcal{F} \otimes V_\tau)^M = \{0\}$ となる.

**2.1. 我々の場合の $M$ 不変基底.** 以上の事を $G = SU(2,2)$, $H = Sp(2,\mathbb{R})$ に対して行ってみよう. まず, $K_\mathbb{C} = SL_2(\mathbb{C}) \times SL_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^\times$ であるから, $M = SU(2)$ の既約表現は重複度 1 以下であらわれる. したがって, $\iota_{\mu,\tau}$ は定数倍を除いて一意であり, 以下それを固定する. 次に $K_H = U(2)$ であるから $K_H$-既約なら $M$-既約である. 従って, $F \in C^\infty(A, \mathcal{F} \otimes V_\tau)$ は

$$F(a) = \sum c_{\mu,\iota_\delta,\tau}(a)\phi_{\mu,\iota_\delta,\tau}$$

と展開される. 和は $\mu \in M^\wedge$, $\delta \in K_H^\wedge$ と, 固定された $\mathrm{Hom}_M(\mu, \mathcal{F}(\delta))$ の基底をわたる.

特に $\dim_\mathbb{C} \tau = 1$ のとき, $\delta$ も $\dim \delta = 1$ すなわち, $\delta_{(l,l)}$ しか現れないので, 単に

$$F(a) = \sum c_{l,\tau}(a)\phi_{l,\tau}$$

と書く.

## 3. SCHMID 作用素

Schmid 作用素の同型成分を計算する際, $\mathfrak{p}_\pm$ の元を上の分解に沿って書き表すことが必要となる. 以下, その為にいくつか準備をする.

**3.1. リー環の一般カルタン分解.** $\mathfrak{g}, \theta, \sigma, \mathfrak{k}, \mathfrak{h}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{a}, \mathfrak{m}$ は前述の通りとする. 可換性より,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{h} + \mathfrak{k} \cap \mathfrak{q} + \mathfrak{p} \cap \mathfrak{h} + \mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$$

なる分解を持つ. $X \in \mathfrak{g}$ に対し, それぞれの成分を $X_{(\pm,\pm)}$ と書く. すなわち, $\epsilon_i \in \{\pm\}$ としたとき

$$X_{(\epsilon_1,\epsilon_2)} = \frac{1}{4}(X + \epsilon_1\theta X + \epsilon_2\sigma X + \epsilon_1\epsilon_2\theta\sigma X) \in \mathfrak{g}(\theta;\epsilon_1) \cap \mathfrak{g}(\sigma;\epsilon_2)$$

定理 2.1 のリー環版として次の分解がある.

$$\mathfrak{g} = \mathrm{Ad}(a^{-1})\mathfrak{h} + \mathfrak{a} + \mathfrak{k}$$

以下では, $X \in \mathfrak{p}_\mathbb{C}$ の元をこの分解に沿って表示する事を目的とする.

$\mathfrak{a}_m$ を $\mathfrak{a}$ を含む $\mathfrak{p}$ の極大可換部分環とする. $\mathfrak{n}$ を $\mathfrak{a}_m$ より定まる制限ルート系の, 正のルート空間の和とする. するとルート空間分解,

$$\mathfrak{g} = \theta\mathfrak{n} + \mathfrak{n} + \mathfrak{c}(\mathfrak{a})$$

を得る. 今,

$$\mathfrak{n}_+ = \{X + \theta X \mid X \in \mathfrak{n}\}$$
$$\mathfrak{n}_- = \{X - \theta X \mid X \in \mathfrak{n}\}$$

とおくと, $\mathfrak{n} + \theta\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_+ + \mathfrak{n}_-$ である. また,

$$\mathfrak{p} \subset \mathfrak{n}_- + \mathfrak{a}_m$$

特に

$$\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h} \subset \mathfrak{n}_- + \mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}_m$$

が成り立つ. したがって, $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ の元の分解が知りたかったら, $\mathfrak{n}_{-,\mathbb{C}}$ の元の分解がわかればよいことになる.

**命題 3.1.** $\alpha|_{\mathfrak{a}} \neq 0$ なるルートと $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ に対し, 次の分解が成り立つ.

$$\frac{1}{2}(X - \theta X) = -(\operatorname{sh} r)^{-1}(\operatorname{Ad} a^{-1} X_{(+,+)}) + (\operatorname{ch} r)^{-1}(\operatorname{Ad} a^{-1} X_{(-,+)})$$
$$+(\operatorname{th} r)^{-1} X_{(+,+)} + (\operatorname{th} r) X_{(+,-)}.$$

ただし, $r = \alpha(\log a)$, $(a \in A)$.

まず, $(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h})_{\mathbb{C}}$, $(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q})_{\mathbb{C}}$ を $M$ 加群として既約分解する. $v$ をそのある既約成分の元とすると, $v$ を一般カルタン分解にそって表示する事は, $M$ の性質により, $\operatorname{Ad}(a^{-1})\mathfrak{h}_{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{a}_{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ への $M$-準同型を決定する事と等しい. 特に最高ウェイトベクトルは各部分の既約成分の最高ウェイトベクトル (または 0) に写っている.

$\mathfrak{g}$ をエルミート型の半単純リー群の場合, 標準分解

$$\mathfrak{p}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{p}_+ + \mathfrak{p}_-$$

を持つ. $[\mathfrak{k}, \mathfrak{p}_\pm] = \mathfrak{p}_\pm$ である. さらに $\mathfrak{h}$ がエルミート型である場合,

$$\mathfrak{p}_\pm = (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h})_\pm + (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q})_\pm$$

と分解される. これは $K \cap H$-加群としての分解でもある.

**3.2.** $SU(2,2)$ **の場合.** 以下, $G = SU(2,2)$ とする. $\theta g = -{}^t\bar{g}^{-1}$ を Cartan involution, $\sigma$ として,

$$\sigma g = \begin{pmatrix} 0_2 & 1_2 \\ 1_2 & 0_2 \end{pmatrix} \bar{g} \begin{pmatrix} 0_2 & 1_2 \\ 1_2 & 0_2 \end{pmatrix}$$

をとる. すると $H = G^\sigma$ は $Sp(2;\mathbb{R})$ と同型になる.

$X_{ij}$ を $(i,j)$-成分のみが 1 の行列とし, $\mathfrak{a} = \mathbb{R}H_0, H_0 = X_{14} - X_{23} - X_{32} + X_{41}$ ととる. すると $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{h} \simeq \mathfrak{u}(2), \mathfrak{m} \simeq \mathfrak{su}(2)$ となり, $(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h})_\pm, (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q})_\pm$ は $K_H$ 加群としても既約となり, それぞれ,

$$(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h})_+ \simeq \delta_{(2,0)}, \quad (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h})_- \simeq \delta_{(0,-2)},$$
$$(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q})_+ \simeq \delta_{(1,1)}, \quad (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q})_- \simeq \delta_{(-1,-1)}$$

という同型ができる. $(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h})_\pm$ のウェイトベクトルとして

$$\begin{aligned} v_{+,2} &= X_{24}, & v_{-,2} &= X_{31} \\ v_{+,1} &= -2^{-1}(X_{14} + X_{23}), & v_{-,1} &= 2^{-1}(X_{41} + X_{32}) \\ v_{+,0} &= X_{13}, & v_{-,0} &= X_{42} \end{aligned}$$

$(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q})_\pm$ のウェイトベクトルとして

$$w_+ = X_{14} - X_{23}, \quad w_- = X_{32} - X_{41}$$

ととる.

**命題 3.2.** (1) $(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h})_\pm$ について.

$$v_{+,2} = \frac{(\operatorname{ch} r)^2}{\operatorname{ch} 2r} \operatorname{Ad} a^{-1} v_{+,2} - \frac{(\operatorname{sh} r)^2}{\operatorname{ch} 2r} \operatorname{Ad} a^{-1} v_{-,2} - \frac{1}{2} \operatorname{th} 2r\, e_+,$$
$$v_{-,2} = \frac{(\operatorname{ch} r)^2}{\operatorname{ch} 2r} \operatorname{Ad} a^{-1} v_{-,2} - \frac{(\operatorname{sh} r)^2}{\operatorname{ch} 2r} \operatorname{Ad} a^{-1} v_{+,2} - \frac{1}{2} \operatorname{th} 2r\, e_+$$

ただし, $e_+ = X_{21} + X_{43}$ とした. 他の基底の分解はそれぞれに $\mathfrak{m}_\mathbb{C}$ の元を作用させる事によって得られる.

(2) $(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q})_\pm$ について.

$$w_+ = \frac{1}{2}(\operatorname{sh} 2r)^2 \operatorname{Ad} a^{-1} I_{2,2} + \frac{1}{2} H_0 - \frac{1}{2}(\operatorname{th} 2r)^{-1} I_{2,2},$$
$$w_- = \frac{1}{2}(\operatorname{sh} 2r)^2 \operatorname{Ad} a^{-1} I_{2,2} - \frac{1}{2} H_0 - \frac{1}{2}(\operatorname{th} 2r)^{-1} I_{2,2}$$

ただし, $I_{2,2} = \operatorname{diag}(1,1,-1,-1) \in \operatorname{Cent}(\mathfrak{k}_\mathbb{C})$.

**3.3. Schmid 作用素とその動径成分.** 微分方程式を得る上で重要なのが Schmid 作用素である. 今の場合, 次のように定義しよう. $F \in C^\infty_{\eta,\tau}(H\backslash G/K)$ に対し,

$$\nabla^+ F(g) = R_{X_{31}}F(g)\otimes X_{13} + R_{X_{32}}F(g)\otimes X_{23} + R_{X_{41}}F(g)\otimes X_{14} + R_{X_{42}}F(g)\otimes X_{24}$$
$$\nabla^- F(g) = R_{X_{13}}F(g)\otimes X_{31} + R_{X_{23}}F(g)\otimes X_{32} + R_{X_{14}}F(g)\otimes X_{41} + R_{X_{24}}F(g)\otimes X_{42}$$

は $K$-equivariant 写像

$$C^\infty_{\eta,\tau}(H\backslash G/K) \to C^\infty_{\eta,\tau\otimes\mathrm{Ad}_\pm}(H\backslash G/K)$$

を定める. これを $C^\infty(A, \mathcal{F}\otimes V_\tau)$ 上に制限すると (動径成分をとる, という) 次のようになる.

**補題 3.3 (Schmid 作用素の動径成分).** $F \in C^\infty(A, \mathcal{F}\otimes V_\tau)$ に対し, $a = \exp(rH_0)$ とおくと,

$$\begin{aligned}
\nabla^+ F(a) = {} & \frac{(\mathrm{sh}\, r)^{-2}}{\mathrm{ch}\, 2r}\left(-\eta(v_{+,2})\phi\otimes v_{+,0} + 2\eta(v_{+,1})\phi\otimes v_{+,1} - \eta(v_{+,0})\phi\otimes v_{+,2}\right)\\
& + \frac{(\mathrm{ch}\, r)^{-2}}{\mathrm{ch}\, 2r}\left(\eta(v_{-,2})\phi\otimes v_{+,0} - 2\eta(v_{-,1})\phi\otimes v_{+,1} + \eta(v_{-,0})\phi\otimes v_{+,2}\right)\\
& + \frac{1}{2}\,\mathrm{th}\, 2r\left(\tau_+(e_+)\phi\otimes v_{+,0} + 2\tau_+(h)\phi\otimes v_{+,1} - \tau_+(e_-)\phi\otimes v_{+,2}\right)\\
& + \frac{1}{4}\Big(R_{H_0} - (\mathrm{th}\, 2r)^{-1}(\tau_+(I_{2,2}) - 2) + 6\,\mathrm{th}\, 2r - (\mathrm{sh}\, 2r)^{-1}\eta(I_{2,2})\Big)(\phi\otimes w_+)\\
\nabla^- F(a) = {} & \frac{(\mathrm{sh}\, r)^{-2}}{\mathrm{ch}\, 2r}\left(-\eta(v_{-,0})\phi\otimes v_{-,2} + 2\eta(v_{-,1})\phi\otimes v_{-,1} - \eta(v_{-,2})\phi\otimes v_{-,0}\right)\\
& + \frac{(\mathrm{ch}\, r)^{-2}}{\mathrm{ch}\, 2r}\left(\eta(v_{+,2})\phi\otimes v_{+,0} - 2\eta(v_{+,1})\phi\otimes v_{+,1} + \eta(v_{+,0})\phi\otimes v_{+,2}\right)\\
& + \frac{1}{2}\,\mathrm{th}\, 2r\left(\tau_-(e_+)\phi\otimes v_{-,0} + \tau_-(h)\phi\otimes v_{-,1} - \tau_-(e_-)\phi\otimes v_{-,2}\right)\\
& - \frac{1}{4}\Big(R_{H_0} + (\mathrm{th}\, 2r)^{-1}(\tau_-(I_{2,2}) + 2) + 6\,\mathrm{th}\, 2r + (\mathrm{sh}\, 2r)^{-1}\eta(I_{2,2})\Big)(\phi\otimes w_-)
\end{aligned}$$

となる. ただし, $e_+ = X_{21}+X_{34}$, $e_- = X_{12}+X_{43}$, $h = \mathrm{diag}(1,-1,1,-1)$, $\tau_\pm = \tau\otimes\mathrm{Ad}_\pm$ とした.

さて, $\Phi_{\pi,\tau}$ を新谷関数とする. $\pi$ の取り方より, corner $K$-type は 1-次元である. したがって, 前述の通り, $\Phi_{\pi,\tau}(a) = \sum c_l(a)\phi_{l,\tau}$ と展開できる.

作用素 $\nabla^+\circ\nabla^+$ を考えるとこれは $\tau$ から $\tau\otimes\mathrm{Ad}_+\otimes\mathrm{Ad}_+$ へのシフトをひきおこす. さらにそこから 1 次元既約成分への射影 $P$ を考えると対応する $K$-type が $\pi$ に

存在しない事から 0 になる. すなわち,

$$P \circ \nabla^{+} \circ \nabla^{+} \Phi_{\pi,\tau}(a) = 0$$

という式が得られる. 一方, $\nabla^{-} \circ \nabla^{+}$ をほどこし, やはり一次元既約成分への射影 $P'$ を考えると元の関数の定数倍になる.

$$P' \circ \nabla^{-} \circ \nabla^{+} \Phi_{\pi,\tau}(a) = \chi_{\pi} \Phi_{\pi,\tau}(a)$$

これを $c_l$ の式に書き直すと次の三項間の関係式を得る.

**補題 3.4.**

$$\begin{aligned}
&\Biggl(\frac{1}{8}\left(R_{H_0} - 2l(\operatorname{sh} 2r)^{-1} - 2(1-k)(\operatorname{th} 2r)^{-1} + 6 \operatorname{th} 2r\right)\left(R_{H_0} + 2k(\operatorname{th} 2r)^{-1} - 2l(\operatorname{sh} 2r)^{-1}\right)\\
&\qquad + r_l^{1-} r_{l-2}^{2+} \frac{(\operatorname{sh} r \operatorname{ch} r)^2}{(\operatorname{ch} 2r)^2} + r_l^{1+} r_{l+2}^{2-} \frac{(\operatorname{sh} r \operatorname{ch} r)^2}{(\operatorname{ch} 2r)^2}\Biggr) c_l(a)\\
&\qquad - r_{l+2}^{1-} r_{l+2}^{2-} \frac{(\operatorname{ch} r)^4}{(\operatorname{ch} 2r)^2} c_{l+2}(a) - r_{l-2}^{1+} r_{l-2}^{2+} \frac{(\operatorname{sh} r)^4}{(\operatorname{ch} 2r)^2} c_{l-2}(a) = 0,\\
&\Biggl(-\frac{1}{8}\left(R_{H_0} + 2l(\operatorname{sh} 2r)^{-1} + 2(1-k)(\operatorname{th} 2r)^{-1} + 6 \operatorname{th} 2r\right)\left(R_{H_0} + 2k(\operatorname{th} 2r)^{-1} - 2l(\operatorname{sh} 2r)^{-1}\right)\\
&\qquad + r_l^{1-} r_{l-2}^{2+} \frac{(\operatorname{ch} r)^4}{(\operatorname{ch} 2r)^2} + r_l^{1+} r_{l+2}^{2-} \frac{(\operatorname{sh} r)^4}{(\operatorname{ch} 2r)^2}\Biggr) c_l(a)\\
&\qquad - r_{l+2}^{1-} r_{l+2}^{2-} \frac{(\operatorname{sh} r \operatorname{ch} r)^2}{(\operatorname{ch} 2r)^2} c_{l+2}(a) - r_{l-2}^{1+} r_{l-2}^{2+} \frac{(\operatorname{sh} r \operatorname{ch} r)^2}{(\operatorname{ch} 2r)^2} c_{l-2}(a) = \chi_{\pi} c_l(a)
\end{aligned}$$

ここで, $r_l^{**}$ は埋め込み $\iota_\delta$ に依存して決まる定数.

**3.4. 定理の証明.** 特に $\eta$ として正則離散系列 $\eta_{(l_0,l_0)}$ を取ったとき, $c_{l_0}(a)$ は二項間の関係式になる. したがって, 二つの式を連立させる事により, 定理 1.3 の微分方程式を得る.

さらに式 (1) の $t=1$ での特性指数を考えると

$$\pm(k-l)$$

となっていることがわかり, 定理 1.2 が示される.

## References


1. M. Flensted-Jensen, *Discrete series for semisimple symmetric spaces*, Anal. Math. **111** (1980), 253–311.
2. T. Hayata, *Differential equations of principal series Whittaker functions on* $SU(2,2)$, to appear in Indag. Math.
3. ———, *Whittaker functions of generalized principal series on* $SU(2,2)$, preprint, 1996.
4. G. Heckman and H. Schlichtkrull, *Harmonic analysis and special functions on symmetric spaces*, Perspectives in Mathematics, vol. 16, Academic Press, SanDiego, New York, Boston, London, Sydney, Tokyo, Toronto, 1994.
5. A. W. Knapp, *Representation theory of semisimple groups, —an overview based on examples—*, Princeton Mathematical Series, vol. 36, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1986.
6. T. Moriyama, *Spherical functions with respect to the semisimple symmetric pair* $(Sp(2,\mathbb{R}), SL(2,\mathbb{R}) \times SL(2,\mathbb{R}))$, Master Thesis, 1997.
7. M. Tsuzuki, *Real Shintani functions for a symmetric pair* $(U(n,1), U(n-1,1) \times U(1))$, preprint UTMS 96-44, 1996.



Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo 3-8-1 Komaba Meguro-ku, Tokyo 153, Japan

*E-mail address*: hayata@ms.u-tokyo.ac.jp